

II Encontro anual de
INICIAÇÃO 
CIENTÍFICA DA UNESPAR

A GEOMETRIA FRACTAL: CONSTRUÇÕES QUE CONTRIBUEM COM O ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Fabricia de Carvalho Paixão (PIC)
UNESPAR/Campo Mourão, fah-carvalho@hotmail.com
Mariana Moran Barroso (Orientadora), marianamorabar@gmail.com
UNESPAR/Campo Mourão, nupemfecilcam@gmail.com
Veridiana Rezende (Coorientadora), rezendeveridiana@gmail.com
UNESPAR/Campo Mourão, nupemfecilcam@gmail.com

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica. Fractais. Educação Matemática.

INTRODUÇÃO

Em 2008, a noção de Geometria dos Fractais foi incluída nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná junto ao conteúdo geometrias não-euclidianas. Esta inclusão nos levou ao seguinte questionamento: como a geometria fractal poderá ser abordada nas aulas de matemática, de maneira diferenciada através de atividades que contemplem diferentes conteúdos matemáticos?

Com base nisto durante este projeto de iniciação científica tivemos por objetivo elaborar atividades para serem desenvolvidas através da construção de fractais com o auxílio de materiais manipuláveis e/ou instrumentos de desenho geométrico, como régua e compasso e também do *software* GeoGebra, com o intuito de explorar diferentes conteúdos matemáticos durante as aplicações que ocorreram com alunos e professores da rede Básica de Ensino e em um minicurso no XII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM).

Durante a pesquisa fizemos uso da pesquisa bibliográfica com materiais de domínio público a respeito da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e no livro “Descobrendo a Geometria fractal para a sala de aula” de Ruy Madson Barbosa. Estudamos a respeito do assunto através da realização de grupos de estudos com a participação de docentes e discentes, também, da Universidade Estadual do Paraná- UNESPAR- Campus de Campo Mourão.

A pesquisa bibliográfica foi então o suporte para a elaboração das atividades que seguiram o seguinte esquema: construção do fractal, questionário a respeito de conteúdos matemáticos e por fim uma plenária a respeito do assunto. Os questionários que aplicamos foram elaborados com base na teoria dos registros de representação semiótica com o intuito de cobrar a conversão entre diferentes registros de representação os quais são: figural, língua natural, numérico e algébrico entre outro, pois conforme Duval (2012) perceber. Já o livro “Descobrendo a Geometria fractal para a sala de aula” de Ruy Madson Barbosa (2005) serviu como suporte para a escolha dos fractais que foram construídos.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

Acreditamos ser relevante nosso estudo a respeito da geometria fractal atrelado a teoria dos Registros de Representação Semiótica, uma vez que esta abordagem pode contribuir com alunos e professores, possibilitando novas formas de trabalho pedagógico no ensino e aprendizagem de diferentes conteúdos matemáticos.

É importante ressaltarmos que as elaborações e aplicações das atividades ocorreram em parceria com mais dois acadêmicos de Iniciação Científica (IC), os quais também realizam pesquisas a respeito da Geometria Fractal. A primeira atividade, baseada na construção do cartão fractal intitulado Escada do Saber, realizou-se com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, de uma escola Estadual da Rede Básica de ensino, da cidade de Campo Mourão, e também com professores de Matemática de um curso de formação continuada. A segunda atividade, baseada no fractal Triângulo de Sierpinski, foi aplicada em um minicurso no XII Encontro Nacional de Educação Matemática. Por fim, a atividade baseada no fractal árvore pitagórica, foi aplicada com professores em formação continuada e desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola Estadual da Rede Básica de Ensino da cidade de Peabiru.

Ao final da pesquisa analisamos as questões respondidas pelos sujeitos referentes a implementação do fractal Escada do Saber e do fractal Árvore Pitagórica e verificamos entre quais registros de representação estes apresentaram mais facilidade em realizar conversão. Observamos também se os sujeitos sentiram dificuldades em realizar a construção dos fractais com o auxílio dos materiais manipuláveis e de desenho geométrico, disponibilizados por nós, e relatamos suas opiniões acerca das atividades. Assim, no decorrer deste texto apresentaremos a descrição da implementação das atividades baseadas nos fractais mencionados, alguns resultados parciais e considerações finais a respeito das mesmas.

GEOMETRIA FRACTAL

Ao observarmos alguns lugares do nosso cotidiano, nos deparamos com casas, edifícios, barracões e outras construções que seguem o modelo da geometria euclidiana, sendo essas construções modeladas pela representação de quadrados, triângulos, círculos, cubos, esferas, entre outros. Porém, ao observarmos o galho de uma árvore, folhas de uma planta, montanhas, raios em um dia de chuva, nuvens e até mesmo alguns alimentos, nos deparamos com algumas formas irregulares que não podem ser modeladas perfeitamente pela geometria euclidiana.

Contudo segundo Barbosa (2005), podemos utilizar a geometria fractal para modelar essa natureza irregular, pois a mesma oferece aproximações para essas formas. Tal geometria é caracterizada por sua auto similaridade, uma propriedade especial dessas formas geométricas (fractais). Esta propriedade caracteriza que as partes de um fractal que lhe seguem são semelhantes. Ainda segundo o mesmo autor, Benot Mandelbrot foi o pioneiro em estudar a geometria fractal que para este, tal geometria reflete uma natureza de irregularidades e fragmentação.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

A priori Mandelbrot definiu um fractal se baseando no conceito de dimensão: “*um fractal é, por definição, um conjunto para qual a dimensão Hausdorff- Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica*”. Porém esta definição não satisfaz nem ao mesmo Mandelbrot e recebeu algumas críticas. Posteriormente J. Feder caracterizou fractal da seguinte forma: “*um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos*”. (BARBOSA, 2005 p.18)

As Diretrizes Curriculares Estaduais (DCE) compõe um documento oficial do Estado do Paraná, responsável por recomendar os conteúdos e metodologias que podem ser empregados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. No ano de 2008 houve alterações neste documento que acresceram ao tópico de Geometrias as Geometrias Não-Euclidianas, como conteúdos estruturantes do currículo escolar paranaense. Dentre as geometrias Não- Euclidianas contempladas por esta mudança está a noção de Geometria dos Fractais (PARANÁ, 2008).

As ideias de BARBOSA (2005, p. 14), incentivam o trabalho da geometria fractal:

Cremos, no entanto, que para os fractais, em especial para a geometria fractal, faz-se necessário ao educador conseguir captar o educando com o transparecer de sua própria vibração e talvez evidenciando o êxtase na contemplação da beleza de seus visuais, conduzindo-o ao prazer pelas informações e conhecimentos culturais da vasta variedade de fractais.

Assim, elaboramos atividades com base na DCE, visando o trabalho da geometria fractal no Ensino Fundamental e Médio, e com o intuito de proporcionar aos atuais e futuros profissionais da educação um maior conhecimento a respeito da geometria fractal e instruções em como trabalhar a mesma em sala de aula.

Teoria dos Registros de Representação semiótica

Conforme Duval (2012) na atividade cognitiva matemática é essencial que se mobilize diferentes registros de representação semiótica: figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural e que se possa escolher entre um registro e outro. Ressalta também que é importante que os objetos e conceitos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e sim que estes possam ser reconhecidos através de suas representações. A conversão entre pelo menos dois registros de representação implicará então no entendimento dos objetos e conceitos matemáticos.

Ainda segundo Duval (2012), quando transformamos uma representação em outro registro, de modo a conservar totalmente ou somente uma parte da representação inicial, realizamos uma conversão. Segundo Duval, existem diferentes tipos de conversões, por exemplo: a ilustração que é a conversão do registro língua natural para o registro figural, a tradução que consiste na conversão do registro língua natural para outro tipo de língua e a descrição que é a conversão do registro figural para o registro língua natural.

Duval (2012) ainda ressalta que é importante não haver confusão entre os termos conversão e tratamento, visto que o tratamento de uma representação é a transformação desta no mesmo registro no

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

qual ela foi criada, ou seja, é uma transformação interna ao registro inicial, por exemplo, o número 0,2 (registro numérico) pode ser tratado como ou, assim como o número 0,2 pode ser convertido do registro numérico para o registro da língua natural: 0,2 → dois décimos.

Acreditamos que caso a solicitação da conversão de diferentes Registros de Representação Semiótica não seja proposta pelo docente, dificilmente poderá ser realizada pelo aluno. Consideramos que não solicitar os diferentes Registros de Representação Semiótica e a conversão entre eles, pode influenciar no ensino e aprendizagem do aluno em relação ao conceito matemático. Assim como se apresenta em Duval (2012) quando diz:

Não obstante, as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes (DUVAL, 2012, p.268).

Com base nisto ao elaborarmos as questões que suscitaram a exploração de diferentes conteúdos matemáticos a partir da construção dos fractais, nos baseamos da teoria dos registros de representação semiótica, sendo que cada questão solicita a representação de um registro de representação: língua natural, numérico ou algébrico e conseqüentemente a conversão a partir do registro figural que é o fractal construído.

DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE CARTÃO FRACTAL

A implementação da atividade do fractal intitulado Escada do Saber, ocorreu no Colégio Estadual Marechal Rondon, com uma turma de 7º ano, durante as aulas de apoio (contra turno), na cidade de Campo- Mourão – PR. 15 alunos participaram da implementação, a qual foi realizada durante 4 aulas nos dias 24 e 29 de outubro de 2016. Denotaremos por A1, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12 os alunos que participaram do 1º e 2º momento e por B1, B2 e B3, os alunos que participaram apenas do 2º momento. Em cada momento trabalhamos uma tarefa diferente conforme consta na tabela 1.

Tabela 1

Relação das tarefas propostas e alunos participantes			
Data	Tempo Destinado	Tarefa	Alunos participantes
24-09-2016	2 aulas de 50 minutos cada	Construção do Cartão Fractal	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11 e A12
29-09-2016	2 aulas de 50 minutos cada	Resolução e correção das questões 01, 02, 03 e 04. Ver Anexo 1.	A5, A6, A8, A9 e A10, B1, B2 e B3.

Fonte: Autoras

Durante a implementação da atividade a professora regente da turma esteve presente somente nas aulas do dia 24-09, sendo que nas aulas do dia 29-09, tivemos a presença de um professor substituto, acreditamos que devido a isto ao aluno A8 se recusou em responder as questões propostas,

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

diante desta situação não o forçamos e tempo depois o mesmo começou a desenvolvê-las. Além disso, neste dia, devido a troca de professor, a aula teve um atraso para iniciar, mas mesmo assim o tempo foi suficiente para realizarmos o que se pretendia, apesar de alguns alunos apresentarem problemas em relação a comportamento, estavam mais dispersos e desatentos e não se empenharam para resolver as questões como haviam se empenhado durante a construção do fractal, a atividade se desenvolveu de modo satisfatório.

Com já mencionamos o primeiro momento se deu pela construção do cartão fractal, para a realização distribuimos para cada aluno uma folha de sulfite, papel laminado, régua e tesoura. Optamos por fazer o cartão duas vezes, primeiro utilizando somente a folha de sulfite A4 e depois utilizando o papel laminado de medida 24cm x 16cm e os orientamos que para a construção Para a construção do primeiro cartão instruímos os alunos a cortarem a folha de sulfite em medidas 24cm x 16cm, neste momento já deixamos claro o que iríamos considerar como largura e comprimento e que trabalharíamos com a folha na posição vertical.

Caso professor regente considere duas aulas muito tempo somente para a construção poderá realizá-la somente uma vez, porém acreditamos que é fundamental o teste na folha de sulfite para melhores resultados, visto que caso o aluno corte ou dobre errado, implicará em medidas erradas para o preenchimento da questão 1. Feito isto instruímos os passos para realizar a construção do fractal escada e para auxilia-los levamos o fractal construído até a etapa 1, etapa 2 e etapa 3, para que os alunos pudessem observar o que consideramos como etapa 1, 2 e 3. Após a realização da construção utilizando a folha de sulfite, construímos novamente o fractal utilizando o papel laminado já disponibilizado nas medidas 24cmx16cm.

Durante a construção os alunos se dedicaram e todos a realizaram por completo conforme as instruções que apresentamos e realizamos com eles, apesar de alguns alunos não ter paciência em seguir o passo a passo para a realização de cada etapa, finalizando a construção rapidamente. Destacamos que todos os alunos realizaram a construção do fractal, o aluno A10 apresentou dificuldades para medir e recortar, já o aluno A8 se destacou durante a construção do cartão fractal perante os outros alunos em relação à habilidade e aluno A9 se desanimou no final da atividade por ter que repetir os processos e considerou a atividade cansativa, apesar disto no final da atividade os alunos demonstraram ter gostado do fractal construído. Ver Imagem 1.

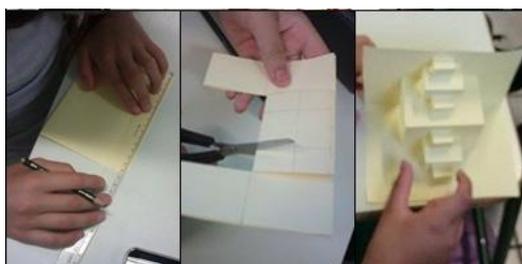


Imagem 1: Construção do Cartão Fractal Escada do Saber

Fonte: Autoras

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

Vale ressaltarmos que é importante auxiliar os alunos bem durante a dobragem, medidas e cortes, pois o erro nestes processos pode acarretar em medidas erradas para comprimento, largura, área e perímetro de cada figura, que são solicitados na tabela da questão 1. O segundo momento da atividade se deu pela realização e correção das questões propostas. Finalizada a construção, entregamos as questões 01, 02, 03, 04, para os alunos responderem em sala. Ao elaborarmos as questões 01,02 e 03, as quais contemplam diferentes conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados através do fractal escada, nos baseamos na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, com o objetivo de solicitar a conversão entre os diferentes registros.

Tabela 2

Registros solicitados nas questões	
Questão	Registro contemplado
01-	Numérico
02	Língua Natural
03-	Língua Natural

Fonte: Autoras

No início alguns alunos tiveram dificuldades em relembrar o que é área, perímetro e como se calcula. Diante disto os induzimos a relembrar, neste momento eles interagiram bem e relataram o que sabiam a respeito desses conceitos, em seguida os auxiliamos em como encontrar o comprimento e largura de uma figura assim.

Antes do preenchimento da tabela instruímos os alunos em como preenchê-la e o lado que considerariamos como comprimento e o lado que considerariamos a largura e que apresentassem na folha todos os cálculos, porém alguns alunos não fizeram isto. Para a realização do preenchimento da tabela, os alunos deveriam analisar cada etapa formada durante a construção, após finalizarem o preenchimento, iniciamos a correção, momento no qual os alunos prestaram atenção e percebemos que os mesmos conseguiram identificar seus erros e analisar o motivo de terem errado.

Com relação ao restante das perguntas, esperávamos que eles respondessem mais sobre o que aprenderam e como aprenderam, porém alguns alunos se recusaram a responder e nós não os forçamos. Vale ressaltarmos também que na tabela pode ser solicitado aos alunos que generalizem o comportamento de cada um dos itens da mesma, ou seja, solicitar os alunos uma generalização para a etapa n, trabalhando assim o conteúdo de função exponencial com turma do Ensino Médio.

ANÁLISE DOS REGISTROS

Nosso objetivo foi analisar nas questões 01, 02, 03 e 04, se os alunos tiveram dificuldades em realizar a conversão entre os registros solicitados, visto que as questão 1 e 3 solicitam a conversão do registro figural (fractal) para o registro numérico, a questão a conversão do registro figural (construção 1) para o registro língua natural e a questão 2 solicita a conversão do registro figural para o registro numérico. Conforme consta na tabela 1, apresentada anteriormente, 15 alunos participaram

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

da implementação, sendo que 12 alunos participaram do 1º momento e 8 alunos participaram do 2º momento. No entanto, apenas 5 alunos desenvolveram a construção e responderam todas as questões, sendo assim para a análise consideramos apenas as tarefas realizadas pelos alunos A5, A6, A8, A9 e A10. Vale ressaltar que a análise de dados e conclusões foram baseadas na construção 1 e nas questões 01, 02, 03 e 04. A Tabela a seguir apresenta uma relação dos alunos que desenvolveram cada uma das questões. Ver tabela 3.

Tabela 3

Alunos que responderam as questões propostas	
Questão	Alunos
01	A5, A6, A8, A9 e A10
02	A5, A6, A8, A9, A10, B1, B2, e B3
03	A5, A6, A8, A9, A10, B1, B2, e B3
04	A5, A6, A8, A9, A10, B1, B2, e B3

Fonte: Autoras

No momento de preencher a tabela da questão 1: “Considerando o cartão fractal que você acabou de construir: Preencha a tabela a seguir indicando o nº de figuras, comprimento, largura, perímetro e área das figuras formadas em cada etapa do cartão”, os alunos realizaram a conversão do registro figural para o registro numérico, percebemos que eles se confundiram um pouco com as figuras formadas em cada etapa, os retângulos, (os quais denominavam de cubos), porém quando dissemos para trabalhar com o cartão de maneira plana sobre a mesa essa dificuldade foi superada, assim conseguiram visualizar melhor o registro figural e preencher a tabela, registro numérico. Durante essa primeira conversão, alguns alunos tiveram dificuldades em operar com números que apresentavam casas decimais já outros calcularam errado o valor da área ou perímetro apesar de ter compreendido o conceito. Além disso, houve aqueles que inverteram o valor do comprimento com o da largura, calculou errado o número de figuras de alguma etapa e considerou a etapa 1 como sendo a etapa 0. Ver Imagem 2.

Etapas	Nº de figuras em cada etapa	Comprimento (cada figura)	Largura (cada figura)	Área (cada figura)	Perímetro (cada figura)
1	1	12	8	96	40
2	2	6	4	24	20
3	8	2	3	6	10
4					

Etapas	Nº de figuras em cada etapa	Comprimento (cada figura)	Largura (cada figura)	Área (cada figura)	Perímetro (cada figura)
1	1	12	8	96	20
2	2	6	4	24	10
3	8	2	3	6	39
4					

Imagem 2: Tabelas preenchida pelos alunos A5 e A6

Fonte: Autoras

A 4º etapa não foi construída com os alunos, o intuito era que eles analisassem o comportamento do perímetro, comprimento, largura e áreas das figuras conforme aumentasse o número de etapas e assim preenchessem os dados da tabela para a etapa 4. O aluno A9 ao receber as questões perguntou como responderia a etapa 4 e foi instruído a preencher as etapas de 1 à 3, analisá-las e tentar responder a etapa 4 e somente os alunos A6, A8, A9 e A10 tentaram preencher a 4º etapa. Durante a correção da tabela eles explicaram como tinham chegado aos dados da 4ª etapa. O aluno

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

A10 considerou que o número de figuras desta etapa seria 7, pois $1+2+6=7$. Já o aluno A9 considerou como 8, pois está aumentando de 2 em 2.

Em relação a questão 2: “Escreva com suas palavras, os passos que você seguiu para construir o seu cartão fractal, considerando cada uma das etapas”, conversão do registro figural para o registro língua natural, podemos observar que a dificuldade em realiza-la foi média, pois os alunos não se recordavam os passos que seguiram durante a montagem do cartão fractal, pode ser que isto tenha ocorrido pelo fato de a construção ter sido realizada no dia 24 e as questões foram aplicadas no dia 29. Esperávamos que eles escrevessem mais a respeito da construção, dos passos que seguiram, porém alguns se recusaram a desenvolver esta questão, resolvemos então não pressionar. Apesar disto os alunos responderam as questões, os alunos A5, A6 e A8 relataram que para a construção necessitaram medir e cortar. O aluno A9 relatou que precisou realizar medidas, dividir, traçar uma linha, dobrar e cortar e assim por diante em cada etapa. Ver imagem 3.

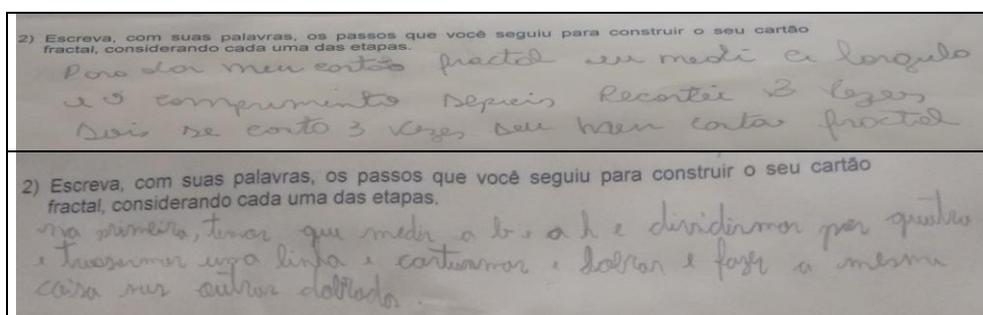


Imagem 3: Resposta da questão 2 dos alunos A5 e A10

Fonte: Autoras

Por fim, com relação a conversão do registro figural para o registro língua natural solicitado na questão 3: “Você notou alguma relação entre as figuras construídas na etapa 1 com as da etapa 2? e da etapa 2 com a etapa 3 ?e da etapa 1 com a 3?”, o aluno A6 conseguiu identificar que o valor do perímetro diminui à metade conforme aumentava o número de etapas. O aluno A5 analisou que os números de figuras aumentam da etapa 1 para a etapa 3, já o aluno A8 observou que da etapa 1 para a etapa 2 o comprimento diminuiu. O aluno A9 relatou que o número de “cubos” (figuras) aumentou e o comprimento e perímetro diminuíram da etapa 2 para 3 e 1 para 3. O aluno A10 relatou que da etapa 1 para a 2, 2 para 3 diminui e 1 para 3 aumentou, porém não especificou no que houve esse aumento e diminuição. Apenas o aluno A6 observou que nas medidas: comprimento, largura, perímetro e área, ambas diminuíam à metade em cada etapa. Ver Imagem 4.

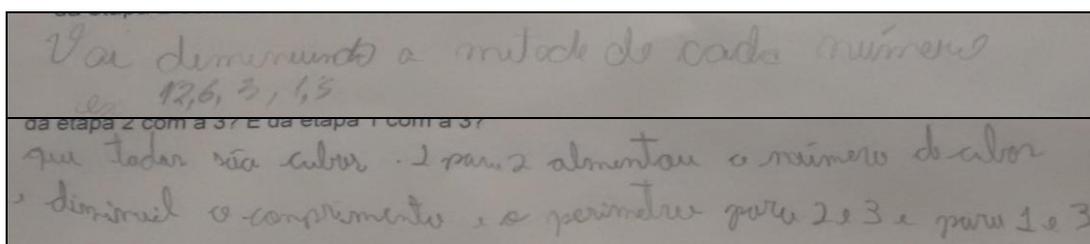


Imagem 4: Resposta da questão 3 dos alunos A6 e A9

Fonte: Autoras

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES DA ATIVIDADE ESCADA DO SABER

Assim, acreditamos que a atividade aconteceu de modo satisfatório, apesar dos alunos apresentarem algumas dificuldades durante a construção, dificuldades matemáticas em resolver algumas questões, durante a correção percebemos que eles demonstraram aprender, recordar conteúdos matemáticos, além de terem gostado da atividade, como podemos observar nas repostas que obtivemos na questão 4: “O que você achou de desenvolver esta atividade? Justifique sua resposta. Ver Imagem 5.

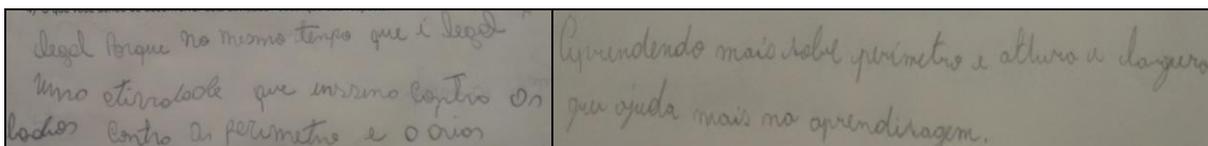


Imagem 5: Correção das questões propostas e resposta da questão 4 dos alunos A5 e A8

Fonte: Autoras

É importante ressaltarmos que os pontos negativos e imprevistos que aconteceram podem ser comuns em várias escolas. Além disso, cabe ao professor selecionar as questões que pretende trabalhar, com base nos conteúdos que deseja alcançar ou recordar com os alunos. Para a implementação não fizemos isto, pois nosso objetivo também era mostrar que os conteúdos matemáticos como: Área e Perímetro de um retângulo, operação de soma e multiplicação com números decimais ou frações, podem ser trabalhados através do fractal Escada do Saber.

DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISE DA ATIVIDADE ÁRVORE PITAGÓRICA

A implementação da atividade do fractal intitulado Árvore Pitagórica, ocorreu no Colégio Estadual XVI de Dezembro com uma turma do 3º ano do Ensino Médio, durante as aulas de matemática, na cidade de Peabiru –PR. A implementação da atividade ocorreu durante 7 aulas do dia 21 de junho de 2016 ao dia 12 julho de 2016 e constou com 15 alunos participantes os quais denotamos por A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14, A15, os alunos que realizaram as tarefas propostas. Ver tabela 4.

Tabela 4

Relação dos alunos que realizaram as tarefas	
Tarefa proposta	Alunos participantes
Construção 1 – Construção do fractal com o auxílio de instrumentos de desenho geométrico.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14 e A15 Total: 15 alunos
Questões A - Referentes a conteúdos matemáticos.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13 e A14. Total: 14 alunos
Construção 2 – Construção do fractal com o auxílio do software GeoGebra.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14 e A15 Total: 15 alunos
Construção 3 – Construção do fractal com o auxílio de materiais manipuláveis.	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13, A14 e A15 Total: 15 alunos
Questões B - referentes às opiniões sobre as construções 1 e 2.	A1, A2, A3, A4, A5, A7, A10, A11, A12 e A13 Total: 10 alunos

Fonte: Autoras

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

No decorrer da implementação houve alguns imprevistos como nos dias 22 de junho de 2016 e 06 de julho de 2016, nos quais haveria 2 aulas de matemática cada, os alunos não foram para o colégio devido a chuva, pois a maioria destes mora no sítio e o transporte público não busca em dias assim. Além disso, a professora de Geografia da turma nos cedeu a 5ª aula, pois no dia 12 de julho no horário da aula de matemática houve uma reunião com a equipe pedagógica e professores. Durante a implementação da atividade a professora regente da turma esteve presente em 6 aulas, exceto na 5ª aula do dia 12 de julho, pelo fato de ter aula com outra turma, acreditamos que por este motivo somente alguns alunos quiseram participar da construção 3.

A realização da construção 1 ocorreu nos dias 21, 28 e 29 de junho e ao total necessitamos de aproximadamente 2 aulas de 40 minutos cada e 1 aula de 50 minutos. Acreditamos que a quantidade de aulas foi extensa para a realização da construção 1 devido a dificuldade de alguns alunos em manusear os instrumentos de desenho geométrico, principalmente o compasso como relatam nas questões B-02: Você sentiu dificuldades durante as construções da árvore pitagórica? Em caso positivo, especifique as dificuldades.

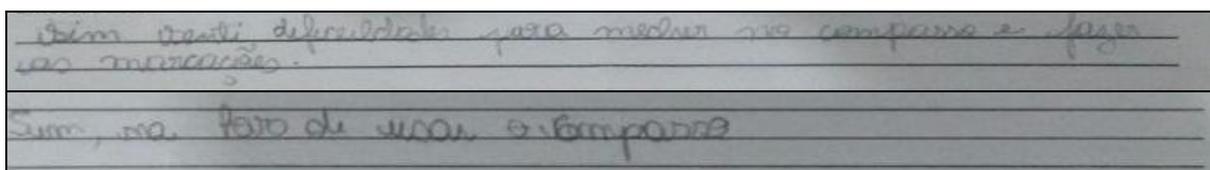


Imagem 6: Resposta da questão B-02 dos alunos A1 e A3

Fonte: Autoras

Antes de iniciarmos a construção 1 distribuimos régua, compasso, transferidor e uma folha de sulfite para cada um dos alunos. Em seguida, instruímos os alunos, passo a passo de como realizar a construção, auxiliando aluno por aluno sempre que possível. Apesar das dificuldades, já mencionadas, os alunos realizaram a mesma por completo, e a maioria deles construíram a Árvore Pitagórica pelo menos até a etapa 3. Ver Imagem 7. Finalizamos a construção 1 no dia 29 de julho e em seguida entregamos as questões A para os alunos que iniciaram a responder em sala, porém como a aula já estava prestes a finalizar, levaram as questões para concluir em casa. Ao elaborarmos essas questões, as quais contemplam diferentes conteúdos matemáticos que podem ser trabalhados através do fractal árvore pitagórica, nos baseamos na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval, com o objetivo de solicitar a conversão entre os diferentes registros de representação semiótica.

Tabela 6

Registros Solicitados nas questões	
Questões A	Registro contemplado
01-	Língua Natural
02- a) e 02- b)	Numérico
03-	Língua Natural

Fonte: Autoras

No dia 05 de julho em uma aula de 40 minutos realizamos a correção das questões A e alunos foram participativos nesse momento o qual consideramos também de aprendizagem. Alguns alunos

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

relataram que não responderam algumas das questões, acreditamos que isto possa ter ocorrido pelo fato de não saberem os conteúdos matemáticos necessários para resolverem. Apesar disto, durante a correção os alunos participaram e puderam recordar e aprender conteúdos como: Área e Perímetro de um quadrado, Teorema de Pitágoras, Operações com Frações e Raízes, Simetria e Semelhança de Triângulos.

Para corrigirmos as questões projetamos no quadro, com o auxílio do Datashow, a árvore pitagórica construída no *software* Geogebra, para auxiliar a correção. A professora regente se propôs a corrigir as questões com os alunos, que foram participativos durante o preenchimento da tabela no quadro. Foi retomado os passos da construção para determinar a medida dos lados dos quadrados em cada etapa, que é a metade da diagonal do triângulo da etapa anterior ao quadrado que se deseja construir. Os alunos disseram ter entendido o processo de encontrar a metade da diagonal do quadrado, com o auxílio do compasso. A professora então os induziu a observarem o que estava acontecendo com a área dos quadrados e uma aluna disse: “está diminuindo”. Após o preenchimento da área de cada quadrado os alunos concluíram que a mesma diminui pela metade em cada etapa. Cabe aqui observamos que após o preenchimento da tabela até a etapa 4, induzimos os alunos a pensarem nas próximas etapas na questão 2- b): “Analisando o quadro acima você sabe dizer o número de quadrados e triângulos formados na etapa 7? E na etapa 10? Justifique sua resposta.”

Nosso objetivo, com a questão 2-b, foi verificar se algum dos alunos observou o comportamento destas quantidades. Na tabela pode ser solicitado aos alunos que generalizem o comportamento de cada um dos itens da mesma, trabalhando assim o conteúdo de função exponencial, porém devido ao tempo a professora regente achou melhor não generalizarmos esses comportamentos. Vale ressaltarmos que caso seja trabalhado a generalização solicitaremos dos alunos o registro algébrico. A Professora regente também retomou a respeito soma dos ângulos internos de um triângulo, na geometria euclidiana. E preencheu na projeção da árvore no quadro, o valor dos ângulos dos triângulos para explicar e relembrar congruência de triângulos, explicou e concluiu com os alunos que os triângulos formados em cada etapa são semelhantes. Em seguida os questionou: “Onde a árvore é simétrica”? Os alunos tiveram dificuldade em responder essa questão, mas nós recordamos para eles o que é simetria e traçamos na projeção da árvore, no quadro, os eixos de simetria da árvore. Para finalizar a professora lembrou uma das características dos fractais, pois já havia trabalhado atividades matemáticas com base no fractal escada, com os alunos. Uma aluna respondeu: “repetição de padrão”.



Imagem 7: Correção

Fonte: Autoras

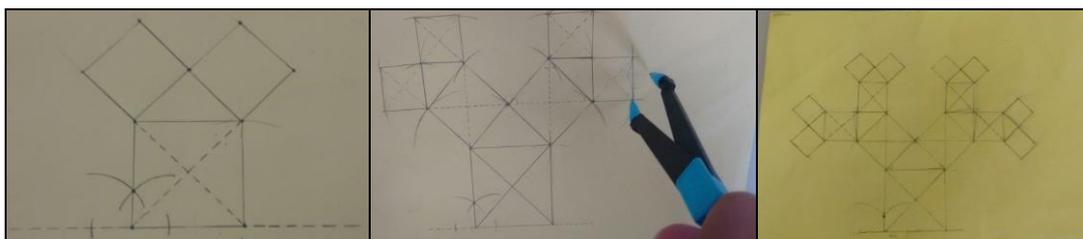


Imagem 8 : Correção das questões A

Fonte: Autoras

Para finalizarmos, no dia 12 de julho realizamos a construção 2 em 1 aula de 50 minutos e a construção 3 tem 1 aula de 40 minutos. Para a realização da construção 3, disponibilizamos aos alunos materiais manipuláveis: papel craft, papel laminado, cola e pincel. Utilizamos o papel craft como base de colagem do papel laminado, o qual foi disponibilizado em formato de quadrados que apresentavam diferentes tamanhos. Ressaltamos que os alunos não participaram da confecção dos quadrados, pois nosso intuito era que eles recordassem o comportamento do tamanho dos mesmos em cada etapa. Então antes de iniciarmos a colagem os questionamos oralmente, seguintes questões:

Pergunta 1: “O que acontece com o tamanho do quadrado em cada etapa?”

Resposta 1: “Eles diminuem!”

Pergunta 2: “Como podemos classificar os triângulos que surgem em cada etapa? E ao compararmos os triângulos de uma etapa com outra, o que podemos concluir?”

Resposta 2: “São Isósceles e Semelhantes”.

Pergunta 3: “Em relação aos ângulos de cada triângulo?”

Resposta 3: “São de 45 graus e 90 graus”.



Imagem 9: Construção 2

Fonte: Autoras



Imagem 10: Construção 3

Fonte: Autoras

ANÁLISE DOS REGISTROS

Nosso objetivo foi analisar nas questões do grupo A, de números: 1, 2 e 3, se os alunos tiveram dificuldades em realizar a conversão entre os registros solicitados, visto que a questões 1 e 3 solicitam a conversão do registro figural (construção 1) para o registro língua natural e a questão 2

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

solicita a conversão do registro figural para o registro numérico. A Tabela a seguir apresenta uma relação dos alunos que desenvolveram cada uma das questões A. Vale ressaltar que a análise de dados e conclusões foram baseadas na construção 1 e nas questões A e B. Conforme consta na tabela 4, apresentada anteriormente, 15 alunos participaram da implementação, na qual 15 realizaram a construção 1, 14 responderam algumas das questões A e 10 responderam algumas das questões B. Sendo assim consideramos os alunos A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13 e A14 para a análise das conversões.

Tabela 7

Alunos que desenvolveram as questões propostas	
Questões A	Alunos que responderam
1	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13 e A14
2 a)	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12, A13 e A14 (Todos deixaram a tabela incompleta)
2 b)	A9
3	A9

Fonte: Autoras

A questão 1: “Descreva os passos que você seguiu para construir a árvore pitagórica”, foi a qual os alunos tiveram menos dificuldade de responder, ou seja realizar conversão a conversão do registro figural para o registro língua natural. Podemos perceber nas questões respondidas que os alunos compreenderam os passos para realizar a construção da Árvore, com o auxílio dos materiais de desenho geométrico, os quais foram citados em algumas respostas, identificaram relações entre a medida do triângulo de uma etapa com a medida dos quadrados que irão surgir na próxima etapa, relataram que o tamanho dos quadrados e triângulos diminuiu conforme surgiram mais etapas na construção e que os triângulos que surgiram foram isósceles.

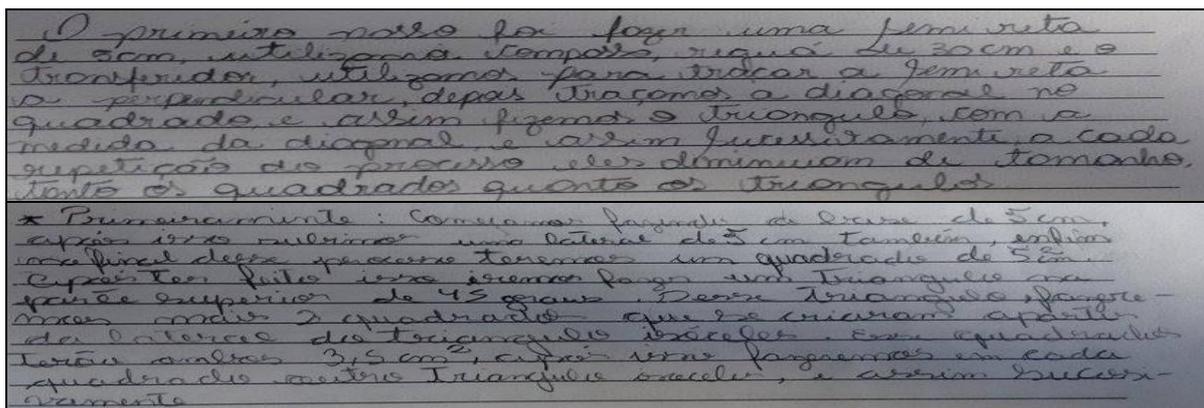


Imagem 11: Resposta dos alunos A8 e A6

Fonte: Autoras

Em relação a questão 2-a: “Considerando o lado do quadrado inicial de medida 1 (cm), preencha as tabela a seguir:”, percebemos que os alunos não tiveram dificuldade para preencher as colunas: número de quadrados formados em cada etapa e número de quadrados formados no total essa dificuldade, já em relação as colunas: valor das medidas do lado de cada quadrado, área de cada quadrado e perímetro de cada quadrado.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

Acreditamos que esta dificuldade possa ter ocorrido pelo fato dos alunos não assimilarem (observarem) que necessitariam utilizar o teorema de Pitágoras. Percebemos esta dificuldade quando eles solicitaram nosso apoio para responder a questões, nosso papel foi de intermediador, tentando ao máximo não “dar a resposta” e sim os induzir a pensar. Já a aluna A9, conseguiu identificar e realizar alguns cálculos. Assim, consideramos que na questão A- 2-a, conversão do registro figural para o registro numérico, houve uma média dificuldade.

Etapa	Número de quadrados formados em cada etapa	Número de quadrados formados no total	Medida do lado de cada quadrado (cm)	Área de cada quadrado (cm ²)	Perímetro de cada quadrado (cm)
0	1	1	1		
1	2	3	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	
2	4	7	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	
3	8	15			
4	16	31			

Imagem 12: Resposta do aluno A11

Fonte: Autoras

Por fim, analisando as questões, conforme a tabela 7 nos apresenta, podemos perceber que somente o aluno A9, resolveu as questões 2-b: “Analisando o quadro acima você sabe dizer o número de quadrados e triângulos formados na etapa 7? E na etapa 10? Justifique sua resposta”, e resolveu a questão 3: “Considerando que um dos casos de semelhança de triângulos é o caso em que os ângulos correspondentes são congruentes. O que podemos afirmar a respeito dos triângulos da etapa 1 comparado com os triângulos da etapa 2? E triângulos da etapa 2 com os da etapa 3? E se comparar os triângulos da etapa 1 com os da etapa 4, o que você observa? Justifique sua resposta”.

Assim, concluímos que os alunos não conseguiram realizar a conversão do registro figural para o numérico, solicitada na questão 2-b e a conversão do registro figural para a língua natural, solicitada na questão 3. Acreditamos que isto possa ter ocorrido pelo fato deles não se recordarem os conteúdos matemáticos solicitados para responderem estas questões e outro motivo pode ser pelo fato de não conseguirem interpretar as questões, dificuldades estas que eles relataram no momento da correção.

Algumas Considerações da Atividade Árvore Pitagórica

Acreditamos que a atividade aconteceu de modo satisfatório. Apesar dos alunos apresentarem dificuldades de resolver e interpretar algumas das questões A, durante a correção, com nosso auxílio e da professora regente, eles demonstraram aprender, recordar conteúdos matemáticos, além de terem gostado da atividade, como podemos observar nas repostas que obtivemos na questão B-1-i: “Quais os conceitos matemáticos você aprendeu com a construção da árvore com régua e compasso?” e na questão B-3: “Escreva com suas palavras o que você achou das aulas sobre a construção da árvore pitagórica”. Ver Imagem 13.

É importante ressaltarmos que os pontos negativos e imprevistos que aconteceram podem ser comuns em várias escolas. Além disso, cabe ao professor selecionar as questões que pretende trabalhar, com base nos conteúdos que deseja alcançar ou recordar com os alunos. Para a

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

implementação não fizemos isto, pois nosso objetivo também era mostrar que vários conteúdos matemáticos como: Área e Perímetro de um quadrado, Teorema de Pitágoras, Operações com Frações e Raízes, Simetria e Semelhança de Triângulos podem ser trabalhados através do fractal árvore pitagórica, e também por se tratar de uma turma do 3º ano do Ensino Médio, consideramos interessante recordar com os alunos diferentes conteúdos matemáticos.

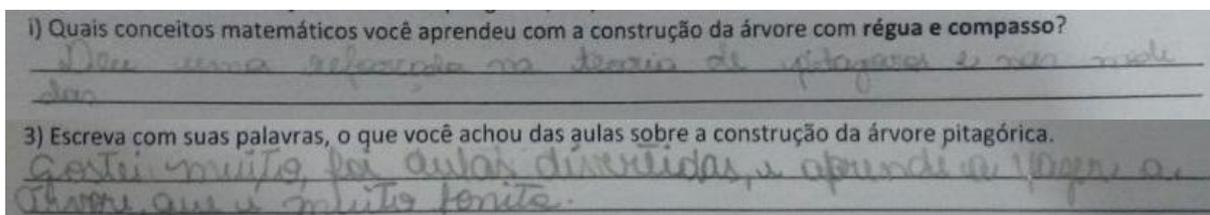


Imagem 13: Resposta dos alunos A1 e A2

Fonte: Autoras

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Assim, ressaltamos que é possível trabalhar a geometria fractal em sala de aula, visto que esta geometria nos oferta a possibilidade de trabalhar diferentes conteúdos matemáticos de maneira dinâmica em vários níveis de Ensino. Por abordarmos uma metodologia diferenciada, com o uso de materiais manipuláveis acreditamos que as aulas de matemática se tornaram divertidas para os alunos e conseguimos assim contribuir com a aprendizagem matemática dos mesmos.

Com relação a todos os professores da rede básica envolvidos nas implementações, cursos e minicursos, nos quais desenvolvemos a construção dos fractais, conseguimos que estes conhecessem sobre a geometria fractal, a qual consideramos enriquecedora para o ensino, e apresentamos possibilidades de construções e conteúdos que podem ser trabalhados, incentivando a abordagem dessas atividades em sala de aula. A priori, temos por resultados alcançados uma grande participação dos alunos durante a construção dos fractais, aprendendo e recordando conceitos matemáticos durante a resolução das questões propostas. Em relação aos professores, estes demonstraram interesse nas atividades e alguns as aplicaram em sala de aula comprovando a contribuição para o ensino e aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. Descobrimos a Geometria Fractal - para a sala de aula. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. e ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares de matemática do Estado do Paraná, 2008. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 09 de maio de 2016.