

II Encontro anual de
INICIAÇÃO 
CIENTÍFICA DA UNESPAR

**ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA A PARTIR DE FRACTAIS
GEOMÉTRICOS: UMA INVESTIGAÇÃO COM O SOFTWARE GEOGEBRA**

Thais Michele Martires (PIC)

Unespar/Campo Mourão, thais.martires@gmail.com

Veridiana Rezende (Orientadora)

Unespar/Campo Mourão, rezendeveridiana@gmail.com

Mariana Moran Barroso (Coorientadora)

Unespar/Campo Mourão, marianamoranmar@gmail.com

INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta os resultados de uma investigação sobre a inserção da Geometria dos Fractais como recurso para o ensino e aprendizagem de matemática. Optamos por essa temática devido a sua potencialidade, sendo possível explorar esta geometria em sala de aula, estudar suas características e propriedades a partir de atividades diferenciadas tais como fractais elaborados com materiais manipuláveis; com instrumentos de desenho tais como régua, compasso, transferidor; fractais construídos em *softwares* de geometria dinâmica tais como o GeoGebra. Além das construções, é possível explorar em cada uma delas diferentes conteúdos de matemática. Ressaltamos que cada exploração tem suas particularidades, podendo ser realizadas separadamente ou em conjunto de modo a contribuir com a aprendizagem dos alunos.

A Geometria dos Fractais foi indicada como conteúdo estruturante nos documentos que orientam o ensino de matemática no Paraná no ano de 2008. Nesses documentos, denominados por Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná – DCE (PARANÁ, 2008), dentre o tópico Geometrias, são destacadas as Geometrias não Euclidianas como conteúdo relevante para o Ensino Fundamental e Médio, visto que muitos problemas do mundo científico e que se encontram no cotidiano do aluno dependem desta geometria para serem resolvidos (PARANÁ, 2008).

De acordo com Padilha (2012), poucos professores tiveram conhecimento deste tema em sua formação inicial, o que causa certa insegurança por parte dos educadores em inserir este tema em suas aulas. A autora ressalta que as instituições de ensino superior, ao formar professores de Matemática, deveriam dar respaldo a temas como este, uma vez que eles foram acrescentados nas diretrizes e, para que sejam contemplados na educação básica, o professor precisa estar atualizado, ou seja, ter conhecimento desta geometria, e saber quando e de que maneira é possível explorá-la em suas aulas.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

Desta forma, faz-se necessário que os professores tenham acesso às novas formas de ensino, de maneira que contribua com o aprendizado do aluno. Nossos estudos mostram que a disciplina de Matemática aliada à Geometria dos Fractais poderá despertar nos alunos maior interesse, motivação e prazer em seus estudos.

Além da importância da Geometria Fractal em sala de aula, também defendemos o uso dos diferentes Registros de Representação Semiótica, segundo os princípios estabelecidos pelo pesquisador francês Raymond Duval. Para Duval (2012), ao refletirmos sobre a aprendizagem de matemática, no sentido de adquirir conhecimentos, as representações semióticas se tornam essenciais para a atividade cognitiva do sujeito que a utiliza. Segundo Duval (2012, p.270), “[...] é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos Registros de Representação Semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro”.

O objetivo desta pesquisa de iniciação científica foi investigar possibilidades para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, a partir da construção de Fractais Geométricos com auxílio do *software* GeoGebra. Com a intenção de atingir o objetivo, elaboramos tarefas matemáticas envolvendo a Geometria dos Fractais e os diferentes Registros de Representações Semióticas. Desse modo, além dos estudos teóricos a respeito da Geometria dos Fractais e da teoria dos Registros de Representação Semiótica, o projeto consistiu em elaborar tarefas sobre fractais considerando registros diferenciados, implementar as tarefas em sala de aula, e analisar os dados a partir dos registros escritos dos alunos e da observação em sala de aula pela pesquisadora, proponente deste relatório.

OS CAMINHOS PERCORRIDOS PARA A REALIZAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO

Após a realização dos estudos teóricos sobre Geometria dos Fractais e Registros de Representação Semiótica, numa proposta de encaminhamento metodológico, elaboramos as tarefas matemática utilizando diferentes recursos didáticos, tais como o uso de materiais de desenho como régua e compasso, o uso de materiais manipuláveis como cartolina e papel laminado, além do uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Além disso, as tarefas matemáticas envolvendo a exploração de cada um destes recursos foram baseadas na teoria dos diferentes Registros de Representação Semiótica. Nessas tarefas foram possíveis de se explorar os registros numérico, língua natural e figural.

Antes das implementações em sala de aula, a orientadora deste projeto foi até dois colégios da região de Campo Mourão, conversou com duas professoras de Matemática e apresentou as tarefas elaboradas. As professoras aprovaram as propostas de tarefas, e aceitaram receber a aluna de Iniciação Científica em suas salas de aula, para que as tarefas fossem desenvolvidas com seus alunos. Informamos que as tarefas foram elaboradas e implementada pela aluna de Iniciação Científica - IC deste projeto, juntamente com outra aluna de IC, orientada pelas mesmas orientadoras deste projeto.

**II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.**

Ressaltamos que não é nosso interesse elencar pormenores das tarefas que não envolveram o *software* GeoGebra, mas sim identificar os fatos mais importantes que vão ao encontro do objetivo desta pesquisa.

A primeira tarefa implementada foi referente ao cartão fractal ao qual designamos “escada do saber”. Para a construção deste fractal utilizamos materiais manipuláveis, e o implementamos com alunos de 7º ano de uma sala de apoio, no contra turno, em uma escola pública na cidade de Campo Mourão - Paraná. Quinze alunos participaram da implementação, sendo desenvolvida individualmente, a qual foi realizada durante 4 horas/aulas, sendo aplicada em dois dias de 2 horas/aulas de 50 minutos cada, no mês de setembro de 2015. A figura 1 apresenta a confecção de cartões por alguns alunos.



Figura 1: Cartão fractal – Escada do Saber
Fonte: Autoras

Nesta atividade os alunos utilizaram a régua para calcular as medidas, realizaram medições e recortes com a tesoura. Ressaltamos que a importância de se ensinar os alunos a manusearem a régua, pois muitos envolvidos em atividades como estas demonstram dúvidas no que se refere às medições iniciarem pelo número zero ou pelo início da régua, nesse último caso a medição se torna incorreta. Além disso, diversos conceitos matemáticos surgem durante a construção tais como números fracionários, números decimais, largura, comprimento, retângulos, paralelepípedos.

Após a realização da construção do cartão fractal, os alunos realizaram as tarefas elaboradas a partir desta construção, indicando as medidas dos lados das figuras formadas em cada etapa, bem como a área e perímetro das figuras de cada etapa. As tarefas matemáticas foram elaboradas buscando explorar os registros numérico e a língua natural, o registro figural também está presente na construção do cartão fractal. A figura 2 apresenta as tarefas elaboradas e entregues aos alunos, referentes a esta construção.

**II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.**

Atividade: Cartão Fractal					
Nome: _____					
Ano ___ Turma ___ Data: ___/___/___					
Considerando o cartão fractal que você acabou de construir:					
1) Preencha a tabela a seguir indicando o nº de figuras, comprimento, largura, perímetro e área das figuras formadas em cada etapa do cartão:					
Etapa	Nº de figuras formadas em cada etapa	Comprimento	Largura	Área	Perímetro
1					
2					
3					
4					
2) Escreva com suas palavras, os passos que você seguiu para construir o seu cartão fractal, considerando cada uma das etapas.					
3) Você notou alguma relação entre as figuras construídas na etapa 1 com as da etapa 2? E da etapa 2 com a etapa 3? E da etapa 1 com a 3?					
4) O que você achou de desenvolver esta atividade? Justifique sua resposta.					

Figura 2: Tarefa elaborada referente à construção do cartão com materiais manipuláveis

Fonte: Autoras

Dentre os 15 alunos que participaram da implementação, 12 alunos participaram do 1º encontro e oito alunos participaram do 2º encontro, e cinco alunos desenvolveram a construção e responderam todas as questões. Denominamos os 12 alunos por A1, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11, A12 que participaram do 1º encontro e por B1, B2 e B3 os participantes do 2º encontro, e elaboramos o quadro 1 indicando as tarefas que cada um dos alunos desenvolveu.

Quadro 1: Relação das tarefas propostas e alunos participantes

Encontro	Tarefa	Alunos participantes
1º (24/09)	Construção do Cartão Fractal	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9, A10, A11 e A12
2º (29/09)	Resolução e correção das questões (01, 02, 03 e 04)	A5, A6, A8, A9 e A10, B1, B2 e B3.

Fonte: Autoras

Durante a construção do cartão fractal, os alunos foram auxiliados pela primeira autora deste trabalho juntamente com outra aluna que desenvolve IC na mesma área. De maneira geral, os alunos se mostraram interessados e todos realizaram por completo a construção do cartão. Consideramos fundamental este momento de auxílio aos alunos, pois se trata de uma tarefa que envolve recorte e dobraduras, e se ocorrer erros nestes processos podem acarretar na construção incorreta do cartão e em medidas erradas para cálculo das tarefas que envolvem comprimento, largura, área e perímetro que são

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

solicitados na questão 1. Embora alguns alunos não tiveram paciência em seguir o passo a passo para a realização de cada etapa do cartão, todos os alunos realizaram a construção do fractal.

Alguns alunos tiveram dificuldades no preenchimento da tabela, pois apesar de que já haviam estudado o conteúdo área e perímetro, não se lembravam de como calcular estes conceitos. Diante disto os induzimos a relembrar, e neste momento eles interagiram bem e relataram o que sabiam a respeito desses conceitos.

Na questão 4 perguntamos o que os alunos acharam de desenvolver a tarefa e se gostaram ou não da atividade. Seguem algumas respostas que consideramos representativas do grupo de alunos:

- *Cansativo por que tinha que recortar várias vezes, mais não é difícil (Aluno A9);*
- *Gostei, foi uma nova experiência (Aluno A10);*
- *Muito lindo, fofinho, maravilhoso, adorei! (Aluno B3).*

Apesar de os alunos apresentarem algumas dificuldades durante a construção, e em resolver as questões propostas que envolviam conteúdos de matemática, durante a correção percebemos que eles demonstraram entender o que erraram e analisaram o motivo de terem errado. Assim, acreditamos que a atividade aconteceu de modo satisfatório, e que proporcionou aprendizagens aos alunos envolvidos, pois numa atividade como esta, diferente das que estão acostumados em resolver em sala de aula, eles puderam relembrar e assimilar conceitos como os de área e perímetro que eles já haviam estudados, mas que eles não se recordavam.

Assim que terminamos a implementação do cartão fractal “escada do saber”, demos início à pesquisa de um próximo fractal que poderia ser explorado em sala de aula de matemática. Com base no livro “Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula”, do autor Ruy Madsen Barbosa (2005). Após a pesquisa foram realizadas reuniões juntamente com a orientadora deste projeto, coorientadora, e com outra aluna de IC, a fim de discutir sobre os próximos passos e selecionar um fractal para dar continuidade à pesquisa. Dentre as possibilidades, o fractal que nos chamou atenção foi a Árvore Pitagórica, em que de acordo com a obra de Barbosa (2005), ela pode ser construída a partir de um triângulo retângulo cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (3,4,5), a partir de um triângulo isósceles retangular, a partir de um triângulo isósceles obtusângulo, ou ainda por um triângulo equilátero. Ressaltamos que Barbosa (2005) não apresenta os passos de construção, ele apenas mostra a imagem da árvore pitagórica e alguns breves comentários.

Ao decidirmos pela Árvore Pitagórica, iniciamos as investigações sobre como poderíamos explorar este fractal em sala de aula, quais conceitos matemáticos poderiam ser explorados e quais tarefas matemáticas poderiam ser elaboradas. Nesse momento, optamos pela árvore que envolve triângulos isósceles retangular. Em nossas pesquisas, não encontramos a construção deste fractal no *software* GeoGebra em língua portuguesa, que é uma de nossas explorações, bem como, em nossas pesquisas iniciais, não encontramos artigos referentes ao tema que explorassem este fractal. Assim, estudamos as possibilidades de tarefas que poderiam ser desenvolvidas a partir do fractal Árvore Pitagórica, e estas serão descritas no decorrer deste trabalho. Ressaltamos que os resultados e análises

**II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.**

serão realizados apenas da exploração com *software* GeoGebra, mas que foi realizada a construção com régua e compasso e com material manipulável.

A segunda tarefa – construção da árvore pitagórica - foi desenvolvida com alunos do 3º ano do Ensino Médio, durante sete aulas de matemática, em uma escola pública na cidade de Peabiru - Paraná. A implementação foi realizada entre o final do mês de junho e o início do mês de julho de 2016, disseminadas em cinco aulas de 40 minutos e duas de 50 minutos. Com esta tarefa, tivemos a intenção de explorar os seguintes conceitos matemáticos: área, perímetro, medida do lado, contagem de figuras que surgem em cada etapa, semelhança, simetria, dentre os conteúdos que surgem indiretamente nos cálculos de área e perímetro como divisão e multiplicação de frações, potenciação, etc.

Inicialmente os alunos construíram o fractal Árvore Pitagórica com auxílio de instrumentos de desenho, sendo estes régua e compasso, auxiliados pela aluna de iniciação científica, autora deste relatório que desenvolveu a construção passo a passo no quadro também com régua e compasso, e pela aluna de IC com projeto na mesma área. Segue algumas construções realizadas pelos alunos utilizando régua e compasso.

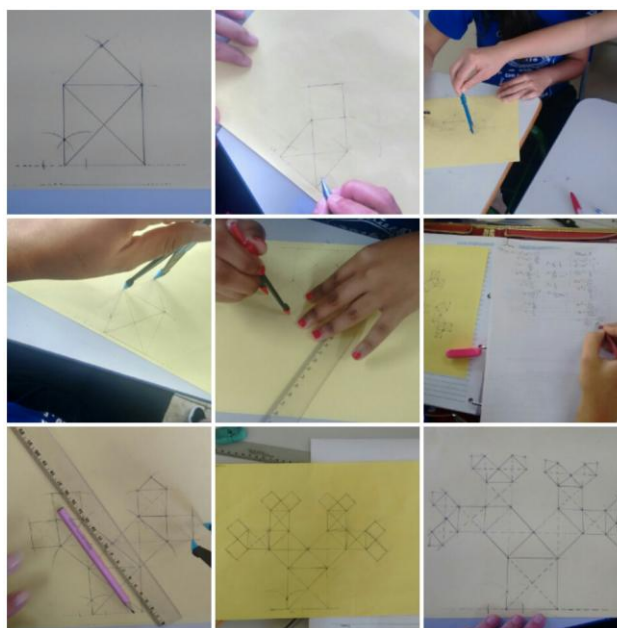


Figura 3: Árvore Pitagórica utilizando régua e compasso

Fonte: Autoras

Após a construção do fractal, os alunos responderam a algumas tarefas matemáticas elaboradas pelas autoras deste trabalho, considerando os pressupostos da teoria de Raymond Duval, ao qual foi contemplado o registro língua natural, o registro numérico e o registro figural. A figura 4 apresenta as tarefas matemáticas que foram elaboradas pelas pesquisadoras e implementadas com os alunos, sujeitos colaboradores desta pesquisa.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

Atividades – Parte 1

Nome: _____ Turma: _____
 Data: ____/____/____

Considerando a árvore pitagórica que você construiu desenvolva as atividades a seguir:

- 1) Descreva os passos que você seguiu para construir a árvore pitagórica.
- 2) Considerando o lado do quadrado inicial de medida 1 cm, preencha as tabelas a seguir:


Tabela 1- Em relação aos quadrados formados

Etapa	Número de quadrados formados em cada etapa	Número de quadrados formados no total	Medida do lado de cada quadrado (cm)	Área de cada quadrado (cm ²)	Perímetro de cada quadrado (cm)
0					
1					
2					
3					
4					
...					
n					

Analizando o quadro acima você sabe dizer o número de quadrados formados na etapa 7? E na etapa 10? Justifique sua resposta.

- 3) Considerando que um dos casos de semelhança de triângulos é o caso em que os ângulos correspondentes são congruentes. O que podemos afirmar a respeito dos triângulos da etapa 1 comparado com os triângulos da etapa 2? E triângulos da etapa 2 com os da etapa 3? E se comparar os triângulos da etapa 1 com os da etapa 4, o que você observa? Justifique sua resposta.

4) Observe a imagem a seguir:



a) Ao traçarmos uma reta de modo que esta divida uma imagem ao meio em duas partes iguais, podemos dizer que esta imagem é simétrica com relação a essa reta, chamada de eixo de simetria. Sabendo disso, você acha que esta figura possui eixos de simetria? Em caso positivo, trace os eixos de simetria na figura e justifique a sua resposta.

Figura 4: Tarefas referentes a construção com instrumentos de desenho

Fonte: Autoras

Para esse primeiro momento da pesquisa, dentre as sete aulas de implementação, três foram utilizadas para a construção com régua e compasso, a necessidade desta quantidade de aulas foi decorrente das dificuldades apresentadas pelos alunos em manusear os instrumentos de desenho. Segundo a professora regente, os alunos tem dificuldades até mesmo em manusear e medir com a régua. Assim, além da novidade do fractal que surgia a cada etapa construída pelos alunos, o ato de manusear os instrumentos de desenho régua e compasso também eram novidades para eles.

Em relação às questões propostas, os alunos foram indicados a resolverem individualmente, seguido do auxílio da primeira autora deste trabalho, da professora regente, e de outra aluna participante de Iniciação Científica na mesma área. Por último, foi realizada a plenária de correções das tarefas pela professora regente, em que os alunos de modo geral participaram das correções. Alguns alunos não responderam a todas as questões que envolviam conteúdos de matemática, ou efetuaram os cálculos de maneira errada. Acreditamos que isto possa ter ocorrido pelo fato de não saberem ou não lembrarem os conteúdos matemáticos necessários para resolverem.

Apesar disto, durante a correção foi possível recordar e aprender os conteúdos propostos da pesquisa como: Área e Perímetro de um quadrado, Teorema de Pitágoras, Operações com Frações e Raízes, Simetria e Semelhança de Triângulos. Segundo a professora regente, estas tarefas foram muito significativas para os alunos, pois eles puderam relembrar e aprender estes diversos conceitos

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

matemáticos em uma única atividade que foi atrativa e diferenciada para os alunos. Com o desenrolar das aulas, percebemos que apesar dos alunos cursarem o 3º ano do Ensino Médio, eles apresentavam dificuldades com conceitos matemáticos mais elementares tais como soma de frações, soma de números decimais, teorema de Pitágoras entre outros.

Para corrigirmos as questões projetamos na lousa branca, com o auxílio do Datashow, a figura do fractal *Árvore Pitagórica* construído no *software* Geogebra. A professora regente se propôs a corrigir as questões com os alunos, que foram participativos durante o preenchimento da tabela no quadro, conforme ilustra a figura a seguir.

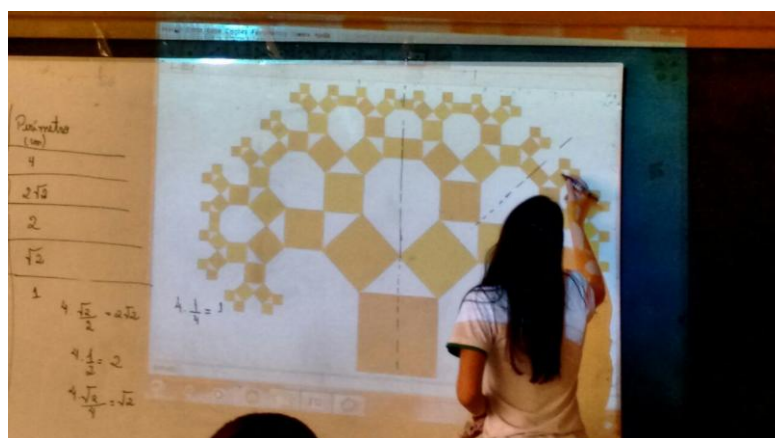


Figura 4: Professora regente durante a correção

Fonte: Autoras

A tarefa também foi realizada com materiais manipuláveis, momento em que os alunos tiveram que montar uma *Árvore Pitagórica* grande, que foi colada na parede da sala, utilizando recursos de recorte e colagem, conforme ilustra a figura 6.



Figura 6: *Árvore Pitagórica* construída com materiais manipuláveis

Fonte: Autoras

**II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.**

Diante das tarefas aplicadas, a coleta de dados desta pesquisa foi realizada por meio de observação e aplicação do questionário referente à tarefa desenvolvida no *software* GeoGebra. Para implementação da tarefa e posterior análises, optamos por desenvolver a pesquisa em dois momentos, o primeiro: a construção do fractal Árvore Pitagórica no *software* GeoGebra, e por último a aplicação das questões referentes a esta construção.

DESCRIÇÃO DA IMPLEMENTAÇÃO E ANÁLISES DAS TAREFAS NO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Após a construção da árvore pitagórica com régua e compasso, realizamos a construção com o *software* GeoGebra em uma aula com duração de 50 minutos. Quinze alunos estavam presentes nesta aula. O tempo disponível para disseminação desta tarefa foi um dos empecilhos em nossa pesquisa. Consideramos que uma atividade como esta seja implementada com mais tempo para que os alunos possam se familiarizar com o software e realizar as construções de modo ainda mais significativo, afinal cada aluno tem o seu tempo de aprendizado.

A aula foi realizada no laboratório de informática, com o intuito de explorar o fractal Árvore Pitagórica no *software* GeoGebra. O laboratório possui aproximadamente 18 computadores, todos funcionaram bem e tinham o *software* GeoGebra instalado. Com isto, a tarefa foi desenvolvida individualmente, sob orientação da primeira autora deste trabalho, da professora regente, e em parceria com outra aluna de iniciação científica sob orientação da terceira autora deste trabalho. Para tanto, foi elaborado um tutorial com os passos da construção do fractal Árvore Pitagórica no *software* GeoGebra, e três questões referentes a esta construção.

Utilizamos o Datashow para projetar na parede o passo a passo da construção. Enquanto era realizada a construção no *software* pela primeira autora, os alunos acompanhavam no projetor e depois faziam em seus computadores. Foi possível notar que alguns alunos tiveram dificuldades em utilizar o *software*, bem como indicaram dificuldades em manusear o mouse, atribuímos isto ao fato de que eles não estão acostumados ao uso de tecnologias em aulas como esta. As figuras 7 e 8 mostram algumas imagens referentes à distribuição dos alunos no laboratório de informática e à construção do fractal no Geogebra.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.



Figura 8: Alunos no laboratório
Fonte: Autoras

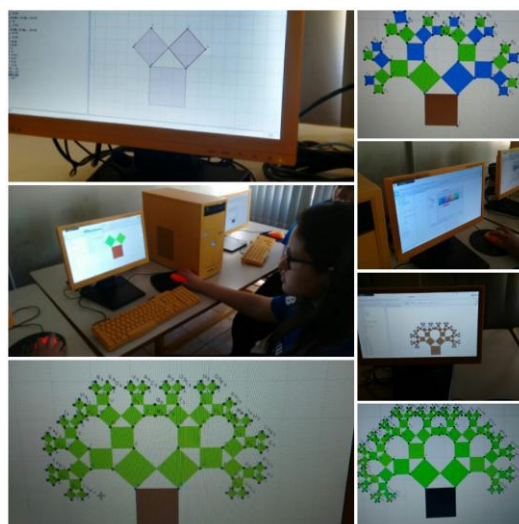


Figura 8: Alguns dos fractais elaborados
Fonte: Autoras

As primeiras experiências ressaltam interesse por parte dos alunos pelas figuras que surgem na construção, na beleza do fractal conforme aumentam as iterações, a percepção de padrões, bem como algumas dificuldades em relação ao uso do *software*, como manuseio do mouse, encontrar as ferramentas, mesmo com auxílio dado a todo momento. Para construir este fractal, primeiramente constrói-se um triângulo isósceles, de modo que os lados deste triângulo servem como base para a construção de três quadrados respectivos e estes lados. Por último, buscamos criar uma ferramenta que auxilia nas iterações desejadas para este fractal. Neste momento três alunos não conseguiram dar continuidade devido a erros na construção inicial do fractal. Por se tratar de uma ferramenta construída via *software*, se algo for feito errado no começo certamente surgirá o erro na criação da ferramenta.

Para analisar os resultados e verificar se os objetivos desta pesquisa foram alcançados, foi aplicado um questionário ao qual continham três questões referentes à construção. Os resultados apresentados a seguir contemplam as análises mais relevantes desta pesquisa.

<p style="text-align: center;">Questões sobre a construção da Árvore Pitagórica</p> <p>1) Em relação às construções da Árvore Pitagórica, responda:</p> <p>i) Quais conceitos matemáticos você aprendeu com a construção da árvore com régua e compasso?</p> <p>ii) Quais conceitos matemáticos você aprendeu com a construção da árvore no GeoGebra?</p> <p>iii) Qual das duas construções da árvore você prefere – com régua e compasso ou com GeoGebra? Por quê?</p> <p>2) Você sentiu dificuldades durante as construções da Árvore Pitagórica?</p> <p>3) Escreva com suas palavras o que você achou das aulas sobre a construção da Árvore Pitagórica.</p>
--

Figura 9: Questionário referente à construção da Árvore Pitagórica
Fonte: Autoras

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

As questões elaboradas tinham o objetivo de verificar as possíveis contribuições do uso da Geometria Fractal em sala de aula, com uso de *software* GeoGebra. As questões foram aplicadas no segundo momento da pesquisa. Quando questionados sobre o que acharam das construções da Árvore, os alunos relataram que com o *software* ficou mais fácil enxergar o fractal, “*No GeoGebra consegui ver resultados rapidamente*”(Aluno A2). Eles relataram em relação ao fractal feito com régua e compasso “*Senti dificuldade para mexer no compasso e fazer as marcações*” (aluno A1). Ainda, dos dez alunos, três não conseguiram realizar a tarefa no *software*, um deles, o computador travou, “*Achei muito legal, interessante, só não consegui fazer no GeoGebra por que o computador da informática deu erro*” (Aluno A1). Os outros dois não conseguiram por que erraram algum passo, e como a aula estava chegando ao fim, não deu tempo de procurar o erro “*Não consegui fazer a árvore por causa do ponto C que apareceu*” (Aluno A3). “*Achei muito interessante, gostei muito de ter aprendido. Só fiquei um pouco chateado por que não consegui fazer no computador*” (Aluno A10).

Como conclusão da tarefa no laboratório de informática, explorar o computador como ferramenta de aprendizagem, possibilita aos alunos enxergar o computador como instrumento de estudo, e não somente como entretenimento como estão acostumados. Percebemos que o uso do *software* auxiliou no entendimento de características básicas do fractal, mesmo que indiretamente, como auto-similaridade, pois os alunos perceberam que a parte lembra o todo, a complexidade infinita, pois também perceberam que as etapas dos fractais não tem fim, ou seja, que poderiam realizar quantas iterações desejassem.

Este trabalho mostrou uma proposta de exploração da Geometria Fractal em aulas de matemática por meio do *software* GeoGebra, uma vez que o uso de tarefas diferenciadas aliada a uma metodologia adequada, além de contribuir com o ensino e aprendizagem, possibilita ao aluno sair do estado de receptor de informações e participe ativamente em seu aprendizado. A sugestão de se trabalhar com tarefas que envolvam Geometria dos Fractais pode ser realizada em qualquer nível de ensino, cabe ao professor de acordo com os conteúdos que pretende desenvolver ou caso queira recordar outros com os alunos, verificar a melhor maneira de exploração desta geometria.

Se utilizada como recurso didático, esta geometria possibilita reunir vários aspectos positivos quando se trata de aulas diferenciadas como, motivação do aluno, estímulo à criatividade, desenvolvimento do raciocínio lógico do aluno, dentre outros benefícios, seu uso se torna relevante pelas inúmeras possibilidades de exploração.

O exemplo de tarefa apresentado nesta pesquisa teve como o foco o uso de tecnologia a partir do *software* de geometria dinâmica GeoGebra. Mas faz-se necessário ressaltar que dentre muitos conteúdos a serem trabalhados se destacam: área, perímetro, figuras geométricas, funções, trigonometria, progressão aritmética, progressão geométrica, etc. E até mesmo conceitos mais remotos como limites podem ser compreendidos com a tarefa que aqui relatamos.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

Uma das pretensões desta pesquisa era de explorar conteúdos matemáticos na construção utilizando o *software*, como funções, noção de limite, simetria, etc. Mas, devido ao tempo não foi possível realizar tais objetivos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa objetivou-se investigar possibilidades para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, a partir da construção de fractais geométricos com auxílio do *software* GeoGebra. Assim sendo, buscamos desenvolver tarefas integradas envolvendo Geometria dos Fractais com tarefas elaboradas a partir da teoria de Registros de Representação Semiótica, envolvendo conceitos de Geometria Euclidiana, seguidas de uma sequência metodológica como já descrito neste trabalho.

Neste percurso pudemos elencar diversos aspectos da Geometria dos Fractais, explorar diferentes conceitos matemáticos, utilizando diferentes caminhos para alcançar o objetivo desta pesquisa. As aulas no laboratório de informática possibilitou aos alunos utilizarem os computadores como ferramenta pedagógica. Em relação ao uso do *software* de geometria dinâmica GeoGebra pode-se perceber de imediato, o fascínio dos alunos pelas figuras que surgiam na construção do fractal Árvore Pitagórica. Os alunos, ao manipularem o *software* e no decorrer das construções, perceberam características importantes do fractal como auto-similaridade e a complexidade que estes envolvem.

A exploração da Geometria dos Fractais encantou os alunos pela beleza que os fractais apresentam, e quanto mais iterações do fractal surgiam, mais os alunos queriam construir. Em relação ao mesmo fractal construído com materiais de desenho como régua e compasso, as iterações realizadas pelos alunos foram suficientes para o desenvolvimento das questões envolvendo conceitos matemáticos. Assim, o uso de meios tecnológicos além de otimizar o tempo gasto em relação a construção manual, contribuiu na visualização em relação a precisão das medidas conforme as iterações aumentam, a exatidão dos traçados é contemplada quando os alunos manuseiam e constroem as figuras fractais, facilitando a compreensão.

Além disso, considerando que as tarefas foram elaboradas envolvendo diferentes Registros de Representação Semiótica, e considerando que os alunos apresentaram bom desempenho nas tarefas, podemos concluir, fundamentadas em Duval, que houve a compreensão do processo de construção do fractal Árvore Pitagórica e dos conceitos matemáticos envolvidos. Em relação ao *software* GeoGebra, constatamos que seu dinamismo contribuiu para um olhar diferenciado em relação às construções dos fractais realizadas com lápis e papel, permitindo, com mais este registro, uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos.

Pode-se observar ainda que a prática de abordagem neste caso tornou a aprendizagem prazerosa, além disso, ao terminarmos a aplicação geral deste trabalho, os alunos pediram que voltássemos com outras tarefas similares, indicando que eles gostaram da realização destas tarefas.

II Encontro Anual de Iniciação Científica
Universidade Estadual do Paraná
Campus Paranavaí, 25 a 27 de outubro de 2016.

Dentre tantas possibilidades de exploração, esperamos que tenhamos contribuído tanto com os alunos, quanto com os professores que buscam tarefas diferenciadas. Assim o uso da Geometria dos Fractais se mostra um recurso didático rico e se faz pertinente em diferentes contextos, propiciando o aprendizado do aluno.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrimos a Geometria Fractal** - para a sala de aula. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. e ISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares de matemática do Estado do Paraná, 2008. Disponível em http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf. Acesso em: 09 de maio de 2016.

PADILHA, Terezinha Aparecida Faccio. **Conhecimentos Geométricos e Algébricos a partir da construção de fractais com uso do software Geogebra**. 2012. 140f. Dissertação (Mestrado) – Centro Universitário Univates. Lajeado, 2012.