II Encontro anual de INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESPAR

ABORDAGEM ROBUSTA DE BERTSIMAS E SIM APLICADA A PROBLEMAS DEPROGRAMAÇÃO LINEAR SUJEITOS A INCERTEZAS

Vinícius Aparecido Salatta (PIC, Fundação Araucária)
Unespar/Campus de Campo Mourão, vi.salatta@hotmail.com
Profa. Dra. Gislaine Aparecida Periçaro (Orientadora)
Unespar/Campus de Campo Murão, gislaine.pericaro@unespar.edu.br
Profa. Dra. Tatiane Cazarin da Silva (Coorientadora)
UTFPR, Campo Mourão, tatianecazarin@gmail.com

Palavras-chave: Otimização Robusta; Programação Linear sujeito a incertezas; Aplicação.

INTRODUÇÃO

A busca pelo valor ótimo em um problema de programação linear sujeito a incertezas surge frequentemente em problemas cotidianos que envolvem uma tomada de decisão. Esse processo consiste em otimizar uma função linear sujeita a um conjunto de restrições que também são funções lineares. Por exemplo, uma empresa que deseja determinar uma certa quantidade de itens a serem produzidos de modo a maximizar seu lucro em um determinado mês, respeitando toda a demanda do mercado, assim como a mão de obra disponível, matéria-prima, etc. Problemas como esse geralmente são tradados de forma determinística. No entanto, é possível que os dados utilizados no processo de modelagem estejam sujeitos a incertezas oriundas de erros de medição ou previsão, entre outros fatores. Dessa forma, tal tratamento pode fornecer um resultado que não tenha um significado prático, dependendo do contexto em que o problema considerado se insere. Por este motivo temos duas principais abordagens que visam trabalhar com problemas de otimização sujeito a incertezas: a Otimização Estocástica e a Otimização Robusta. Enquanto a primeira abordagem requer um conhecimento da distribuição de probabilidade dos parâmetros sujeitos a incertezas, a segunda não necessita dessa informação e assume que os parâmetros de incerteza estão variando dentro de um conjunto limitado, geralmente convexo, e assume que todos estão variando dentro de um determinado intervalo, dentro de um conjunto de incertezas limitado e geralmente convexo.

De acordo com Bertsimas e Sim (2004), a Otimização Robusta considera como solução ótima, um ponto que permaneça viável para todas as possíveis variações dos parâmetros de incertezas. Esta abordagem dá origem a subproblemas, denominados contraparte robusta, os quais substituem a formulação determinística do problema, levando em consideração as incertezas. O primeiro a estudar problemas de programação linear sujeito a incertezas foi Soyster (1973). Tal abordagem tem como principais características a formulação de uma contraparte robusta que também é um problema linear e o excesso de conservadorismo, uma vez que considera a "pior" realização possível para todos os parâmetros incertos simultaneamente, tornando esta abordagem conservadora e em alguns casos pouco prática. Alguns anos mais tarde, Ben-Tal e Nemirovski (2000) propuseram uma nova abordagem para problemas de programação linear sujeito a incertezas em que há um controle maior do conservadorismo, mas, por outro lado, a contraparte robusta recai em um problema quadrático cônico, o que exige um alto esforço computacional para ser solucionado.

A fim de contornar o conservadorismo e a complexidade computacional das abordagens de Soyster (1973) e Ben-Tal e Nemirovski (2000), respectivamente, Bertsimas e Sim (2004) propuseram uma nova formulação da contraparte robusta de um problema de programação linear sujeito a incertezas, que mantém a linearidade do problema e controla o conservadorismo por meio da inclusão de um parâmetro Γ, definido pelos autores como o "preço da robustez".

Sendo assim, o objetivo deste artigo é discutir a importância de se considerar as incertezas em um problema de programação linear, bem como apresentar aspectos teóricos da abordagem de Bertsimas e Sim (2004) e ilustrá-la por meio de um exemplo didático de programação linear sujeito a incertezas com duas variáveis. Para tanto, o artigo foi organizado da seguinte forma. Na primeira seção apresentamos alguns conceitos básicos da Otimização Robusta Linear. Na segunda seção é discutida a influência das incertezas presentes nos coeficientes das restrições de um problema de programação linear, a qual ilustramos por meio de um exemplo (problema dos brinquedos). Na terceira seção, apresentamos a abordagem robusta de Bertsimas e Sim (2004), e a aplicamos ao problema dos brinquedos na quarta seção. Por fim, na última seçãofazemos as considerações finais do trabalho.

OTIMIZAÇÃO ROBUSTA LINEAR

Seja K um conjunto compacto e convexo onde residem as incertezas, em que $K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m$e $l, u \in \mathbb{R}^n$são vetores fixados. Um problema de programação linear sujeito à incertezas consiste em uma família de problemas[1] do tipo

$$\begin{aligned} minimizar \quad & c^T x + d \\ sujeito\ a \quad & Ax \leq b, \\ & l \leq x \leq u. \end{aligned} \tag{1}$$

onde$(c, d, A, b) \in K$. A contraparte robusta deste problema é dada por

[1] Embora estejamos considerando problemas de minimização, o que está apresentado aqui também vale para problemas de maximização, pois o ponto que maximiza uma função é o mesmo que minimiza seu oposto.

$$\begin{aligned} & minimizar && \{\max_{c,d \in K} c^T x + d\} \\ & sujeito\ a && Ax \leq b, \forall A, b \in K \\ & && l \leq x \leq u. \end{aligned} \tag{2}$$

Pode ser provado que a formulação min-max(2) é equivalente ao problema de minimização dado por

$$\begin{aligned} & minimizar && z \\ & sujeito\ a && c^T x + d \leq z \\ & && Ax \leq b. \quad \forall A, b \in K \\ & && l \leq x \leq u. \end{aligned} \tag{3}$$

Além disso, pode-se provar que os problemas (2) e (3) são equivalentes, no sentido de que se x^*é um minimizador global de (2), então (x^*, z^*) em que $z^* = \max_{c,d \in K} c^T x^* + d$ é também um minimizador global do problema (3). Uma demonstração para cada um desses resultados pode ser encontrada em Silva (2014).

Podemos observar que ambas as formulações (2) e (3) possuem o inconveniente de apresentarem infinitas possibilidades de restrições, caso o conjunto de incertezas K seja infinito, comprometendo a tratabilidade dos problemas. Sendo assim, o objetivo da Otimização Robusta é apresentar formulações computacionalmente tratáveis para os problemas de otimização que levem em consideração as incertezas, como é o caso da formulação proposta por Bertsimas e Sim (2004).

De acordo com Bertsimas e Thiele (2006), uma característica comum da modelagem de problemas de programação linear é considerá-las presentes apenas na matriz A de coeficientes das restrições. Desta forma, no que segue, vamos considerar a seguinte formulação

$$\begin{aligned} & minimizar && c^T x \\ & sujeito\ a && Ax \leq b, \forall A \in K \\ & && l \leq x \leq u. \end{aligned} \tag{4}$$

em que $K \subset \mathbb{R}^{m \times n}$ é o conjunto de incertezas.

Na próxima seção apresentamos um exemplo de problema de programação linear e discutimos a importância de levar em consideração as incertezas que estejam presentes nos parâmetros do modelo, por meio de ilustrações gráficas.

O PROBLEMA DOS BRINQUEDOS

Para exemplificar o significado das incertezas presentes em um problema de programação linear, vamos considerar o seguinte problema:

Problema dos brinquedos: Giapetto fabrica dois tipos de brinquedos de madeira: soldados e trens. Um soldado é vendido por R$30,00 e usa R$10,00 de matéria prima. Cada soldado que é fabricado tem um custo adicional de R$14,00 relativo à mão de obra. Um trem é vendido por R$24,00 e gasta R$9,00 de matéria prima. O custo de mão de obra adicional para cada trem é de R$10,00. A fabricação destes brinquedos requer dois tipos de mão de obra, relacionadas à carpintaria e ao acabamento. Um soldado necessita de 2 horas para acabamento e 1 hora para a fase de carpintaria. Um trem necessita de 1 hora para acabamento e 1 hora para a carpintaria. Cada semana, Giapetto pode obter qualquer quantidade de matéria prima e tem uma demanda ilimitada para os brinquedos. No entanto, conta com uma disponibilidade de até 100 horas dedicadas ao acabamento e 80 horas à carpintaria. Qual deve ser o plano de produção de Giapetto, a fim de maximizar seu lucro semanal (receita - custo)?

O problema de Giapetto pode ser formulado matematicamente como um problema de programação linear dado por

$$\begin{aligned} maximizar \quad & 6x_1 + 5x_2 \\ sujeito\ a \quad & 2x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (5)$$

em que x_1 e x_2 representam a quantidade de soldados e trens que devem ser produzidos, respectivamente. Chamaremos o problema (5) de problema nominal, uma vez que é formulado considerando que todos os parâmetros (coeficientes das funções) são conhecidos com exatidão.

Este problema pode ser resolvido facilmente por meio do método gráfico,ou ainda, utilizando o método Simplex. Sua solução nominal é dada por $x = (20, 60)^T$, o que significa que produzindo 20 unidades de soldados e 60 de trens, Giapetto conseguirá um lucro máximo semanal de R$420,00. Esse resultado pode ser observado na figura 1, onde ilustramos a região viável do problema (parte hachurada), as retas que representam as restrições do problema no caso da igualdade, assim como o ponto ótimo (solução do problema).

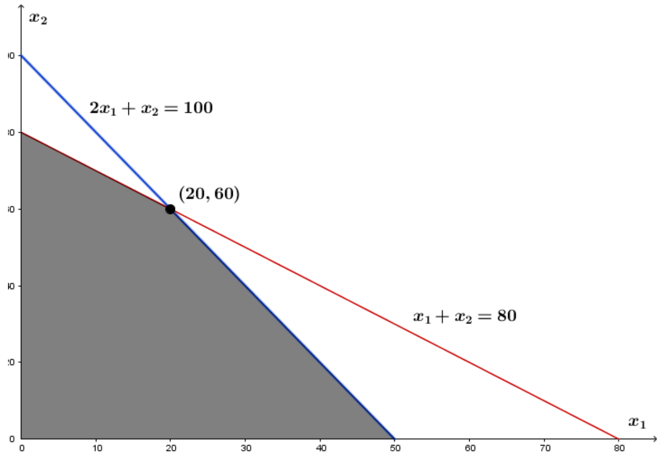

Figura 1: Região viável da formulação nominal

Ainda considerando o problema dos brinquedos, podemos assumir que os coeficientes das restrições estão sujeitos a incertezas, o que é justificável por se tratar do tempo gasto com carpintaria e acabamento dos brinquedos, que são atividades manuais e a duração depende de quem as executam. Sendo assim, vamos supor que o tempo de carpintaria para o soldado varia de 1,5 a 2,5 horas. Desta forma, como entre esses dois valores há uma infinidade de possíveis valores que o coeficiente nominal 2 pode assumir, isso nos fornece infinitas formulações para o problema (4.1), de modo que, para cada uma delas poderiam haver diferentes soluções. Devido a esta interpretação, vamos ilustrar apenas duas formulações possíveis dentre as infinitas possibilidades dentro deste intervalo de variação. Por exemplo, supondo que em uma determinada semana, o tempo gasto pelos funcionários para a fase de carpintaria do soldado seja de 2,25 horas, ou seja, foram gastos 2h e 15min para a produção de cada soldado. E, que na semana seguinte, o tempo gasto pelos funcionários para esta mesma fase foi de 1,75 horas, ou seja, 1h e 45min.

Podemos notar que, considerando a solução nominal, a restrição de disponibilidade de mão de obra para o primeiro caso não é satisfeita, visto que $2{,}25x_1 + x_2 = 105 > 100$. Já para o segundo caso, há uma folga nas horas destinadas à carpintaria, uma vez que $1{,}75x_1 + x_2 = 95 < 100$. Em outras palavras, se na primeira semana Giapetto teria que pagar hora extra para seus funcionários, diminuindo seu lucro, no segundo caso ele perderia tempo de produção, também diminuindo seus lucros na semana seguinte.

Portanto, vamos fazer uma pequena perturbação neste coeficiente, o alterando de 2 para 2,25 considerando o caso da primeira semana e depois alterando-o novamente para 1,75, considerando o caso da semana seguinte. Desta forma, o modelo (6) do primeiro caso reformulado com o novo coeficiente será dado por

$$\begin{aligned} maximizar \quad & 6x_1 + 5x_2 \\ sujeito\ a \quad & 2{,}25x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

e o modelo do segundo caso será dado por

$$\begin{aligned} maximizar \quad & 6x_1 + 5x_2 \\ sujeito\ a \quad & 1{,}75x_1 + x_2 \leq 100 \\ & x_1 + x_2 \leq 80 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

As soluções para os problemas (6) e (7) são $\bar{x} = (16, 64)^T$ e $x^* = (26, 53)^T$, respectivamente. Observe que, no primeiro caso Giapetto teria um lucro de R$416,00, enquanto que no segundo o mesmo teria um lucro de R$421,00. Ambos os resultados podem ser observados nas figuras 2 e 3.

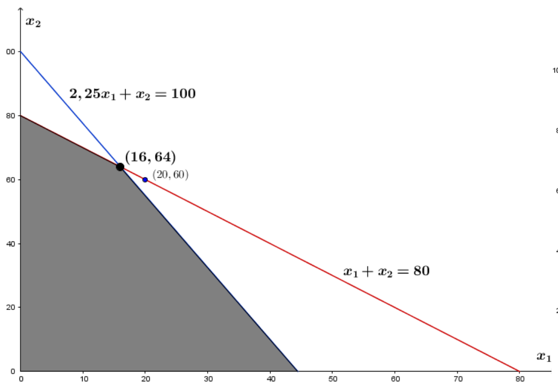

Figura 2: Região viável do problema 4.2

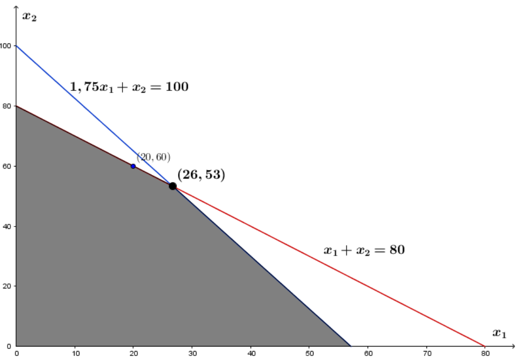

Figura 3: Região viável do problema 4.3

Podemos notar que a solução nominal não é nem ao menos um ponto viável para a formulação obtida em (6), o que ressalta a importância de se considerar as incertezas presentes nos dados, o que nos possibilita encontrar soluções mais realistas para o problema.

Por este motivo, apresentamos a abordagem de Bertsimas e Sim (2004) na próxima seção, a qual é uma das abordagens utilizadas para tratar problemas deste tipo, fornecendo garantias determinísticas e probabilísticas de que as restrições serão satisfeitas quando os dados variarem dentro do conjunto de incertezas, que nesta abordagem, é considerado com intervalos da reta real.

ABORDAGEM E FORMULAÇÃO ROBUSTA DE BERTSIMAS E SIM

A fim de introduzir a abordagem de Bertsimas e Sim (2004), considere a i-ésima restrição do problema (3.4) e sejam J_i o conjunto dos índices j dos coeficientes na linha i que estão sujeitos a incertezas e $\tilde{a}_{ij}$, $j \in J_i$, uma possível realização para o coeficiente definida em $[a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$. Para cada linha i da matriz A, os autores introduziram um parâmetro Γ_i, não necessariamente inteiro, tal que $\Gamma_i \in [0, |J_i|]$. Supõe-se que apenas um subconjunto S_i dos parâmetros sujeitos a incertezas afetam a viabilidade do problema. A garantia de proteção máxima é dada para até $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ coeficientes, de modo que um coeficiente a_{it} assuma o valor $(\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{it}$.

Caso isso aconteça, Bertsimas e Sim (2004) estabeleceram um modelo que retorna uma solução que é viável deterministicamente, e caso mais de $\lfloor \Gamma_i \rfloor$ coeficientes variem, o modelo ainda se torna viável com grande probabilidade. Seja $S_i \subseteq J_i$ tal que $|S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor$ e $\phi = \{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \backslash S_i\}$, temos que a contraparte robusta do problema (3.4) é dada por

$$\begin{aligned} & minimizar \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ & sujeito\ a \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \max_{\phi} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{it} y_t \right\} \leq b_i, \quad \forall i \\ & \qquad -y_j \leq x_j \leq y_j, \quad \forall j \\ & \qquad l \leq x \leq u \\ & \qquad y \geq 0 \end{aligned} \tag{8}$$

em que a função proteção da i-ésima restrição é dada pela expressão

$$\beta_i(x_j, \Gamma_i) = \max_{\phi} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} y_j + (\Gamma_i - \lfloor \Gamma_i \rfloor)\hat{a}_{it} y_t \right\} \tag{9}$$

Quando $\Gamma_i = 0$, o modelo (8) se torna determinístico e caso $\Gamma_i = |J_i|$, priorizamos viabilidade e recaímos na formulação de Soyster (1973). No entanto, para valores de Γ_i no intervalo $[0, |J_i|]$ é possível controlar o conservadorismo do modelo (8), garantindo a viabilidade da i-ésima restrição, que aumenta à medida que Γ_i se aproxima da cardinalidade do conjunto de parâmetros incertos J_i. É a escolha de Γ nesse intervalo que permitiu a formulação de Bertsimas e Sim (2004) contornar o conservadorismo da reformulação robusta de Soyster (1973).

Por este motivo, como o problema (8) tem a característica de ser não-linear, Bertsimas e Sim (2004) provaram a equivalência com o seguinte problema de programação linear.

$$\begin{aligned} &minimizar \quad c^T x \\ &sujeito\ a \quad \sum_{j=1} a_{ij} x_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_i} p_{ij} \leq b_i, \quad \forall i, j \in J_i \\ &\qquad z_i + p_{ij} \geq \hat{a}_{ij} y_i, \quad \forall\ i,\ j \in J_i \\ &\qquad -y_j \leq x_j \leq y_j, \quad \forall j \\ &\qquad l_j \leq x_j \leq u_j, \ \forall j \\ &\qquad p_{ij} \geq 0, \ \forall\ i, j \in J_i \\ &\qquad y_j \geq 0 \ \ \forall j, \ \ z_i \geq 0, \ \ \forall i. \end{aligned} \tag{10}$$

Conforme apresentado por Bertsimas e Sim (2004), é possível determinar um limitante superior para a probabilidade de cada restrição da formulação nominal ser violada ao considerar todas as possíveis realizações $\tilde{a}_{ij}$, independente da solução x^* de (10). Este limitante pode ser obtido pelo teorema apresentado por Bertsimas e Sim (2004, pg.39), apresentado a seguir.

Teorema: Se $\eta_{ij}, j \in J_i$, com $\eta_{ij} = (\tilde{a}_{ij} - a_{ij})/\hat{a}_{ij}$, são variáveis aleatória independentes e simetricamente distribuídas em $[-1,1]$, então

$$\Pr\left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i\right) \leq B(n, \Gamma_i), \tag{11}$$

onde

$$\begin{aligned} B(n,\Gamma_i) &= \frac{1}{2^n}\left\{(1-\mu)\sum_{l=\lfloor \nu \rfloor}^{n}\binom{n}{l} + \mu \sum_{l=\lfloor \nu \rfloor+1}^{n}\binom{n}{l}\right\} \\ &= \frac{1}{2^n}\left\{(1-\mu)\binom{n}{\lfloor \nu \rfloor} + \sum_{l=\lfloor \nu \rfloor+1}^{n}\binom{n}{l}\right\} \end{aligned} \tag{12}$$

onde$n = |J_i|$, $\nu = (\Gamma_i + n)/2$, e $\mu = \nu - \lfloor \nu \rfloor$.

Na próxima seção exemplificamos a abordagem robusta de Bestsimas e Sim (2004) aplicando-a ao problema dos brinquedos.

ABORDAGEM DE BERTSIMAS E SIM APLICADO AO PROBLEMA DOS BRINQUEDOS

Podemos observar pelo contexto do problema que todos os coeficientes estão sujeitos a incertezas, apesar de não significar que todos irão variar. Assim, pela abordagem de Bertsimas e Sim

(2004), temos que os conjuntos J_i serão dados por $J_1 = \{1,2\}$ e $J_2 = \{1,2\}$ e, portanto, pela definição de Γ_i, temos que $\Gamma_1 \in [0,2]$ e $\Gamma_2 \in [0,2]$.

Desta forma, a contraparte robusta do problema dos brinquedos, de acordo com a abordagem proposta por Bertsimas e Sim (2004), pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
& maximizar\, 6x_1 + 5x_2 \\
& sujeito\ a\, 2x_1 + x_2 + \Gamma_1 z_1 + p_{11} + p_{12} \leq 100 \\
& \quad x_1 + x_2 + \Gamma_2 z_2 + p_{21} + p_{22} \leq 80 \\
& \quad z_1 + p_{11} - 0{,}5y_1 \geq 0 \\
& \quad z_1 + p_{12} - 0{,}3y_2 \geq 0 \\
& \quad z_2 + p_{21} - 0{,}4y_1 \geq 0 \\
& \quad z_2 + p_{22} - 0{,}2y_2 \geq 0 \\
& \quad -y_j \leq x_j \leq y_j, \quad \forall j \in \{1,2\} \\
& \quad x_j, y_j, z_j \geq 0\ \forall j \in \{1,2\} \\
& \quad p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22} \geq 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Este modelo nos permite encontrar uma solução para o problema baseada na escolha de Γ_i. Sendo assim, se $\Gamma_i = 0$, a solução do problema (13) será a mesma do problema determinístico. E, se $\Gamma_i = 2$, a formulação de Bertsimas e Sim (2004) será equivalente à abordagem de Soyster (1973), uma vez que estaria considerando o pior cenário possível.

A tabela a seguir, apresenta os resultados obtidos para a resolução do problema dos brinquedos, de acordo com a formulação robusta (13), bem como os respectivos limitantes superiores para as probabilidades de violação das restrições, considerando sempre o mesmo valor para Γ_1 e Γ_2, já que ambos variam no intervalo $[0, 2]$. Os limitantes para as probabilidades foram calculados usando a função (12).

Tabela 1: Soluções obtidas para o problema dos brinquedos

Escolha para Γ_i	Solução x^*	Probabilidade	Lucro Máximo
$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$	$(20, 60)$	0,750	$R\$\ 420{,}00$
$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0{,}5$	$(17, 57)$	0,625	$R\$\ 387{,}00$
$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$	$(14, 54)$	0,500	$R\$\ 354{,}00$
$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1{,}5$	$(14, 52)$	0,375	$R\$\ 344{,}00$
$\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2$	$(13, 50)$	0,250	$R\$\ 328{,}00$

Tomando como exemplo a terceira linha da tabela 1, temos que $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$, ou seja, estamos assumindo neste caso que apenas um coeficiente de cada linha está variando, o que fornece os resultados apresentados pela tabela. Também percebemos que na primeira linha temos a formulação nominal do problema, uma vez que nenhum coeficiente está variando. Já por outro lado, na última linha da tabela temos a formulação de Soyster (1973), umas vez que todos os coeficientes variam, assumindo os piores valores possíveis.Destacamos que a probabilidade encontrada é apenas um limitante superior, e não a probabilidade em si, pois na abordagem de Soyster (1973) especificamente a probabilidade de uma solução ser inviável é nula.

Ainda analisando os resultados da tabela 1, podemos notar que o lucro diminui à medida que consideramos soluções com menor probabilidade de não satisfazer as restrições conforme os coeficientes variem nos intervalos de incertezas dados, sendo todos eles inferiores ao valor ótimo do problema nominal. Esse é o "preço da robustez" que pagamos por priorizar viabilidade.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Por meio deste trabalho, conseguimos compreender a importância de se considerar as incertezas nos dados de um problema de programação linear, e que ao se fazer isso, podemos encontrar uma solução com um resultado mais viável dependendo do contexto em que o problema se aplica. Também verificamos que um problema de programação linear sujeito a incertezas pode ser reformulado por meio de uma contraparte robusta, caracterizada por incluir todas as possíveis realizações dos parâmetros incertos. Por meio de um exemplo didático, ilustramos a abordagem de Bertsimas e Sim (2004), que fornece garantias determinísticas e probabilísticas de que as restrições serão satisfeitas quando os dados variarem dentro dos intervalos em que estão definidos.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Fundação Araucária e à PRPPG/UNESPAR pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

BEN-TAL, A. e NEMIROVSKI, A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical Programming*, v. 88, n. 3, p. 411-424, 2000.

BERTSIMAS, D.; SIM, M. The price of robustness. *Operations Research*, v. 52, n. 1, p. 35- 53, 2004.

SILVA, T.C. **Otimização Robusta**. Projeto de qualificação de doutorado, PPGMNE, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

SOYSTER, A. L. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *OperationsResearch*, v.21, p.1154-1157, 1973.